Capítulo 3

Cinemática del Sólido Rígido

Matrices de rotación

Problema 3.1

La orientación en el espacio de una base $\mathcal{B}_0$ respecto de una base $\mathcal{B}_1$ está dada por los siguientes ángulos de Euler, según la secuencia de rotaciones ZXZ sequence:

- Ángulo de precession: $\psi = 60°$
- Ángulo de nutation: $\theta = 60°$
- Ángulo de rotación propia: $\phi = 60°$

1) Dado que cada ángulo de Euler representa una rotación alrededor de un eje coordenado, de manera que la rotación pueda descomponerse en una secuencia de rotaciones planas que pasa en primer lugar por la base intermedia $\mathcal{B}_2$, y después por la base auxiliar $\mathcal{B}_3$, calcúlense las matrices de rotación asociadas a cada una de las tres rotaciones intermedias, esto es, Q_{21}, Q_{32} and Q_{03}.

2) Empleando la composición de rotaciones, obténgase la matriz de rotacion Q_{01} que representa la orientación de la base $\mathcal{B}_0$ respecto a la base $\mathcal{B}_1$.

Problema 3.2

La actitud de un sólido rígido respecto a una referencia fija viene dada, para un instante de tiempo dado, por la siguiente matrix de rotación:

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Obtengase cada uno de los ángulo de Tait-Bryan (ángulos en la secuencia ZYX), $\phi_1 \in [-\pi, \pi]$, $\phi_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ y $\phi_3 \in [-\pi, \pi]$ respectivamente.

Campo de velocidades y aceleraciones

Problema 3.3

Un sólido S se mueve respecto a un sistema de referencia ortogonal $O_1x_1y_1z_1$ de tal manera que el origen O de un nuevo sistema de ejes $Oxyz$, también ortogonal y ligado al sólido, tiene las ecuaciones horarias:

$$x_1^O = a\Omega\, t, \quad y_1^O = a\Omega\, t, \quad z_1^O = a$$

Los ejes $Oxyz$ van girando de modo que el eje Oz queda constantemente paralelo a O_1x_1 y la parte positiva de Oy forma con la parte positiva de O_1y_z1 un ángulo $\theta = \Omega\, t$ en el sentido indicado en la figura. Hallar las axoides del movimiento.

Ejemplo de [1]

Problema 3.4

Un sólido se mueve respecto de una referencia fija $Oxyz$. En un instante dado la velocidad del punto $A = (a, 0, 0)$ es $v_0\,\mathbf{j}$, la del punto $B = (0, a, 0)$ es $v_0(\mathbf{j}+\mathbf{k})$, y la de $C = (0, 0, a)$ es $v_0(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Calcular en dicho instante la velocidad de mínio deslizamiento, el eje instantáneo y la velocidad angular.

Problema 3.5

Una partícula O se mueve respecto de una referencia $O_1x_1y_1z_1$ describiendo su trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ con un movimiento central de velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ y aceleración $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(t)$ conocidas. Sea $Oxyz$ un sólido con origen en O, tal que Ox está orientado según el radio-vector $\mathbf{r}$, Oz es perpendicular al plano definido por Ox y la velocidad de O, y Oy define un triedro a derechas. Se pide hallar la velocidad y aceleración angular.

Problema 3.6

Se tienen tres puntos de coordenadas $A(a, 0, 0)$, $B(0, 0, 0)$ y $C(0, 0, a)$ de velocidades $\mathbf{v}^A = (0, a\omega, a\omega)$, $\mathbf{v}^B = (0, 0, a\omega)$ y $\mathbf{v}^C = (-a\omega, \lambda, a\omega)$, respectivamente. Se pide:

a) Valor de λ para que formen un sólido rígido

b) Para dicho valor calcular la velocidad angular y el eje instantáneo

Problema 3.7

Un sólido S se mueve de tal forma que dos puntos A y B de él separados por una distancia a recorren respectivamente los ejes Ox, Oy de un sistema de referencia ortogonal $Oxyz$. Además un plano π de S que pasa por AB ha de pasar en todo momento por el punto $C(0, 0, a/2)$ del eje Oz. Se pide hallar el eje instantáneo de rotación y deslizamiento cuando A está en $(a, 0, 0)$ y B en $(0, 0, 0)$.

Composición de movimientos

Problema 3.8

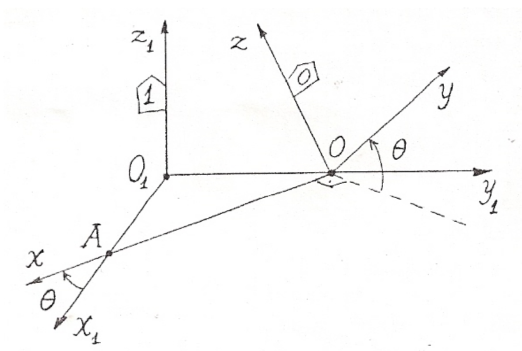
Mediante composición de movimientos, hallar la expresión del campo de velocidades y aceleraciones expresados en coordenadas esféricas.

Problema 3.9

El triedro $Oxyz$ (sólido 0) se mueve respecto del $O_1x_1y_1z_1$ de modo que en todo instante: i) El punto O se mueve por O_1y_1; ii) el eje Ox pasa por $A(a, 0, 0)$; iii) el ángulo θ entre Oy y el plano $O_1x_1y_1$ es igual al ángulo entre O_1x_1 y Ox. Se pide:

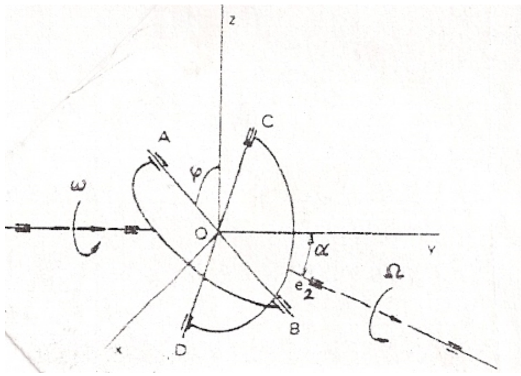
a) Determinar en función de θ y $\dot{\theta}$ los vectores $\boldsymbol{\omega}_{01}$ y $\mathbf{v}^O_{01}$.

b) Axoides del movimiento 0/1



Problema 3.10

La figura representa esquemáticamente una junta Cardan para transmitir una rotación de un árbol e_1 a otro e_2 que forma un ángulo α con él y con el que es concurrente. Determinar el coeficiente de trasnmisión ω/Ω en función de α y el ángulo φ que forma el brazo AB de la cruz Cardan con un línea de referencia fija zz' perpendicular al eje e_1 y a e_2.



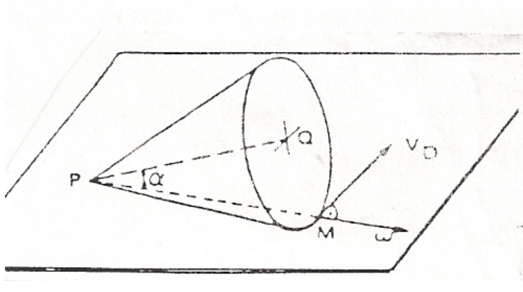
Sólidos en contacto

Problema 3.11

Un disco D de radio a se mueve respecto a un sistema de referencia $O_1x_1y_1z_1$ permaneciendo tangente en todo momento a los planos $O_1x_1y_1$, $O_1x_1z_1$ y quedando su plano perpendicular al $O_1y_1z_1$. La velocidad de rotación del disco tiene componentes iguales según el eje O_1x_1 y la normal al plano que lo contiene. La velocidad del punto que está en contacto con $O_1x_1y_1$ no tiene componente según O_1x_1. Hallas las axoides de este movimiento.

Problema 3.12

un cono circular recto, cuya base tiene un radio R, y cuya altura es h, se mueve con relación a un sistema de referencia permaneciendo siempre tangente a un plano π del mismo.



El movimiento del cono viene definido en cada instante por su velocidad de rodadura $\boldsymbol{\omega}$ y la velocidad de deslizamiento correspondiente a la partícula M que es $\mathbf{v}_D$, ya que se considera la velocidad de pivotamiento del mismo ($\mathbf{v}_D$ es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$). Se pide:

1a) Velocidades del vértice P y del centro Q de la base del cono.

1b) Posición del eje instantáneo de rotación del movimiento.

2) En el supuesto de que tanto $\boldsymbol{\omega}$ como $\mathbf{v}_D$ tengan módulo constante al variar el tiempo.

   a) Axoides de este movimiento

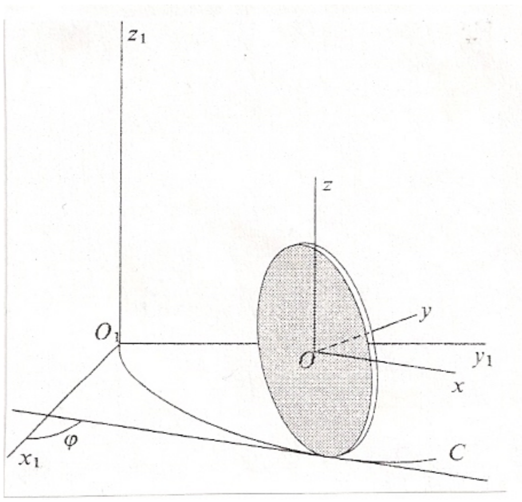
b) Valor de la aceleración angular de este movimiento
c) Aceleración del vértice P y centro Q de la base del cono.
d) Puntos de aceleración nula.

3) Suponiendo que $|\boldsymbol{\omega}| = a\,t$ y $|\mathbf{v}_D| = b\,t$ repetir los cálculos del apartado 2).

Problema 3.13

Un disco de radio a rueda y pivota sin deslizar sobre el plano $O_1x_1y_1$ de un sistema de referencia ortogonal, manteniéndose constantemente perpendicular a dicho plano.

Sea C la curva del plano $O_1x_1y_1$ descrita por el punto de contacto y φ el ángulo que la tangente a la misma forma con O_1x_1. Definamos el sistema de ejes móviles $Oxyz$ indicado en la figura y tales que el eje Oy es el eje del disco, Oz es paralelo a O_1z_1 y el triedro $Oxyz$ sea a derechas.



Finalmente, llamemos p, q, r a las componentes en los ejes $Oxyz$ de la velocidad de rotación del disco respecto al triedro de referencia $O_1x_1y_1z_1$.

El movimiento se realiza de tal manera que en todo momento se verifica la relación

$$q = 4r\,\cos\varphi$$

Si tomamos el origen de arcos de C en el punto O_1 en el que además se supone que $\varphi = 0$, se pide:

1) Obtener a partir de la relación anterior la ecuación intrínseca $s = s(\varphi)$ de la curva C.

2) Obtener las ecuaciones paramétricas $x_1 = x_1(\varphi)$, $y_1 = y_1(\varphi)$ de la curva C. Dibujarla e identificarla.

En todo lo que sigue se supondrá que $r = \omega$ es constante.

3) Velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ del disco.

4) Eje instantáneo.

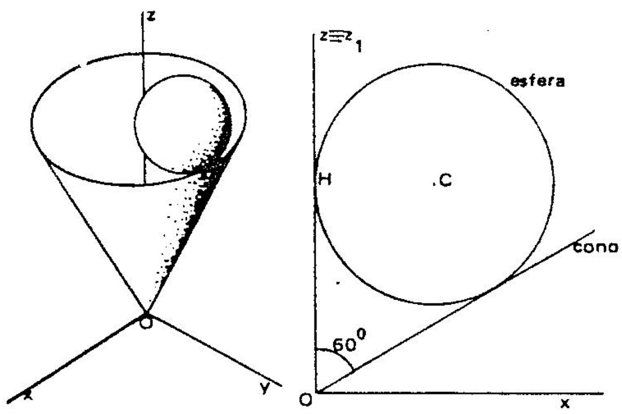
5) Axoides del movimiento.

6) Valor de $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}$.

7) Aceleración del punto del disco que está en contacto con $O_1x_1y_1$.

Problema 3.14

Una esfera de radio a rueda y pivota sin deslizarse por el interior de una superficie cónica de revolución de eje Oz_1 y semiángulo cónico 60°. El centro C de la esfera, describe con una velocidad angular ω constante, una circunferencia de radio a contenida en un plano perpendicular a Oz_1 y con centro sobre este eje.



La figura representa una vista general del sistema y la otra es un corte por el plano auxiliar Oxz que contiene el centro de la esfera y que gira alrededor de Oz en el curso del movimiento con velocidad angular ω. Se pide:

1) Demostrar que las condiciones impuestas, el vector velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ de la esfera ha de quedar contenida en el plano Oxz.

En lo sucesivo se supondrá que la relación entre la velocidades de rodadura y de pivotamiento se mantiene constante a lo largo del movimiento.

2) Demostrar que con esta nueva condición el eje instantáneo de rotación de la esfera corta a Oz_1 en un punto fijo.

3) Determinar las superficies axoides y la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ en los siguientes movimientos particulares:

a) Cuando en todo momento la velocidad de pivotamiento es nula.
b) Cuando la axoide fija se reduce a un plano.

c) Cuando el movimiento de la esfera es un movimiento plano.

d) Cuando el punto de tangencia H de la esfera y el eje Oz_1 se mantiene fijo.

4) Calcular $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}$ en el movimiento particular a).

5) Calcular la aceleración de H en este caso particular.

Nota: Todos los resultados vectoriales deben expresarse en los ejes auxiliares $Oxyz$.

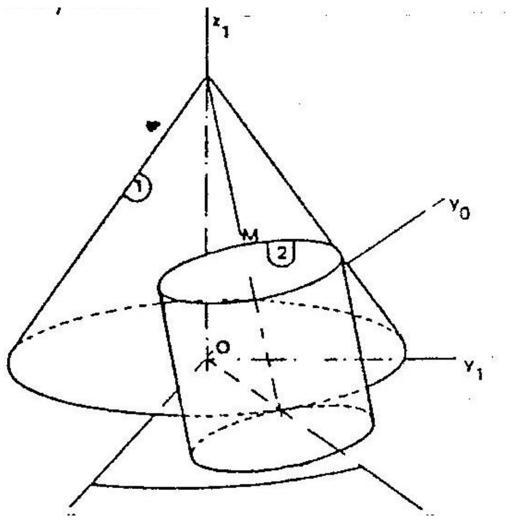
Problema 3.15

El sistema material de la figura está constituido por:

a) Un cono circular recto (Sólido 1) fijo en el espacio de semiángulo en el vértice 30°, radio de la base R y eje vertical Oz_1.

b) Un cilindro circular recto (Sólido 2) móvil de altura R y radio de la base $R/2$.

El cilindro rueda, pivota y desliza sobre la superficie exterior del cono de forma que en todo momento tienen una generatriz común. Se sabe que la generatriz de contacto cilindro/cono gira con velocidad angular constante ω alrededor del eje Oz_1 y que la base inferior del cilindro rueda sin deslizar sobre la base del cono.



En el movimiento cilindro/cono se pide:

1) Eje instantáneo de rotación y deslizamiento.

2) Velocidad angular.

3) Velocidad angular de rodadura y pivotamiento.

4) Axoide fija y móvil.

5) Aceleración angular.

6) Velocidad del punto M situado en la base superior del cilindro según se indica en la figura.

Nota: Todos los cálculos deben realizarse en ejes $Ox_0y_0z_0$ que se indican en la figura y que en todo momento acompañan a la generatriz de contacto cilindro/cono.

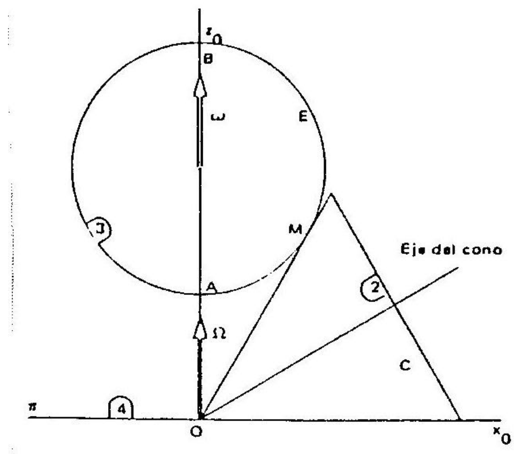
Problema 3.16

Se considera el sistema material constituido por:

a) Una esfera E, de centro O_1 y radio R (Sólido 3) cuyo movimiento respecto a un sistema fijo (Sólido 1) es una rotación pura de valor ω constante alrededor de un diámetro vertical AB.

b) Un plano horizontal π (Sólido 4) cuyo movimiento respecto al Sólido 1 es también una rotación pura de valor Ω constante alrededor de la vertica AB. Dicho plano está situado a una distancia $2R$ por debajo del centro O_1 de la esfera E.

c) Un cono circular recto C (Sólido 2) de vértice el punto O (intersección de la recta AB y el plano π, que rueda sin deslizar por el exterior de la esfera E y por la cara superior del plano π.



En la figura se representa la sección meridiana del sistema material considerado. Los ejes $Ox_0y_0z_0$ están ligados a dicha sección y deben utilizarse para el cálculo de todas las magnitudes vectoriales que intervienen en el problema.

Se pide:

1) Velocidad angular absoluta del eje del cono.

2) Velocidad angular absoluta del movimiento absoluto del cono.

3) Axoides fija y móvil del movimiento absoluto del cono.

4) Aceleración angular absoluta del cono.

Para el caso en que $\Omega = -\omega/2$, determine:

5) Superficies axoides del movimiento

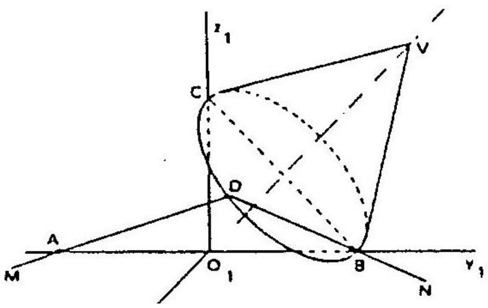
6) Aceleración del punto M del cono en contacto con la esfera.

Problema 3.17

Se dispone de un cono de revolución cuyo radio en la base es $a/\sqrt{2}$ que gira con una velocidad constante ω alrededor de su eje, el cual es la recta fija de ecuación:

$$z_1 = y_1, \qquad x_1 = 0$$

El cono no desliza sobre su eje y la circunferencia de la base pasa por los puntos $B(0, a, 0)$ y $C(0, 0, a)$ de los ejes y_1 y z_1 indicados en la figura.



Una escuadra meterializada por las varillas DM y DN qu eforman ángulo recto, se mueve de forma que el punto D está unido a un punto de la base del cono y además las varillas DM y DN deslizan siempre por los puntos fijos $A(0, -a, 0)$ y $B(0, a, 0)$.

Del movimiento de la escuadra respecto a ejes fijos se pide:

1) Velocidad de los puntos A y B.

2) Velocidad angular.

3) Aceleración angular.

4) Axoide fija.

5) Aceleración de los puntos A y B.

Movimiento plano

[...]

Bibliografía

[1] M. Prieto Alberca. *Curso de Mecánica Racional. Vol. I: Cinemática y Estática.* Aula Documental de Investigación, 1986. ISBN 978-8439876984.